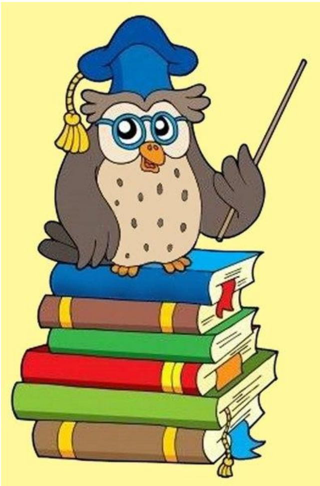
Государственное областное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Грязинский технический колледж»



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**«Решение задач методом Крамера»**

для студентов 1 курса

Рассмотрено на заседании цикловой комиссии
общеобразовательных дисциплин
протокол №___ от _________ 2015г.
Председатель цикловой комиссии
__________ Н.В. Лавровская

Грязи, 2015

Методические указания рекомендованы для использования в учебном процессе, предназначены для студентов, обучающихся на 1 курсе.

Составитель: Н.И. Романова – преподаватель математики Государственного областного бюджетного профессионального образовательного учреждения «Грязинский технический колледж».

Рецензент: И.В. Савишина – зам. директора по учебной работе Государственного областного бюджетного профессионального образовательного учреждения «Грязинский технический колледж», преподаватель математики и информатики.

## Оглавление



## Аннотация

В данном методическом указании рассматриваются способы решения систем линейных уравнений, обосновывается преимущество метода Крамера. Приводятся задачи, которые могут быть решены с помощью систем линейных уравнений. Подробно рассматривается решение каждого примера. Материал излагается доступно. Даются рекомендации, с помощью которых обучающиеся смогут справиться с решением самостоятельно. Методические указания могут быть использованы преподавателем на занятии, а так же для самостоятельного изучения темы.

# Введение

Габриэль Крамер родился 31 июля 1704 года в Женеве (Швейцария), в семье врача. Уже в детстве он опережал своих сверстников в интеллектуальном развитии и демонстрировал завидные способности в области математики.

В 18 лет он успешно защитил диссертацию. Через 2 года Крамер выставил свою кандидатуру на должность преподавателя в Женевском университете. Юноша так понравился магистрату, что специально для него и ещё одного кандидата на место преподавателя была учреждена отдельная кафедра математики, где Крамер и работал в последующие годы.

Крамер является одним из создателей линейной алгебры. Одной из самых известных его работ является «Введение в анализ алгебраических кривых», опубликованный на французском языке в 1750 году. В ней Крамер строит систему линейных уравнений и решает её с помощью алгоритма, названного позже его именем – метод Крамера.

В школьном курсе алгебры изучают методы решения систем линейных уравнений, такие как: метод подстановки, метод сложения, графический метод. Каждый из методов имеет свои достоинства и недостатки. Общее для них то, что большинство учащихся не могут их усвоить на необходимом уровне.

Я предлагаю познакомиться с методом Крамера. Опыт моей работы показывает, что этот метод более доступен, чем ранее изученные, но для начала нужно познакомиться с определителями второго порядка и научиться их вычислять.

## Определители второго порядка

Определителем второго порядка называется число, которое можно записать в виде:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Его значение можно вычислить, найдя разность между произведениями чисел в главной и побочной диагонали.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Например:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 7 \cdot 3 = 6 - 21 = -15$

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 20 - 6 = 14$

Попробуйте вычислить самостоятельно:

$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

Проверьте правильность решения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 1 = 12 + 2 = 14$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -6 \cdot 4 - 5 \cdot (-2) = -24 + 10 = -14$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) = -15 + 2 = -13$$

## Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Если все получилось, пойдем дальше. Будем учиться решать системы линейных уравнений методом Крамера. Пусть дана система:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Составим и вычислим главный определитель из коэффициентов при переменных

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Если он неравен нулю, нужно вычислить определители

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ Тогда корни системы: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$;

Внимательно рассмотрите решение примеров:

1. $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

Составим и вычислим главный определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5;$$

Он неравен нулю. Вычислим вспомогательные определители. Определитель $\Delta_x$ получим из определителя $\Delta$ заменой его первого столбца столбцом свободных коэффициентов.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 14 + 1 = 15;$$

Определитель $\Delta_y$ получим из определителя $\Delta$ заменой его второго столбца столбцом свободных коэффициентов.

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 7 = -10$$

Вычислим корни системы уравнений.

$$x = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{-10}{5} = -2;$$

Ответ: (3;-2)

2. $\begin{cases} 5x+2y=12 \\ 3x+y=7 \end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=5-6=-1;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}=12-14=-2;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=35-36=-1;$$

$$x=\frac{-2}{-1}=2; \qquad y=\frac{-1}{-1}=1;$$

Ответ: (2;1)

Попробуйте решить самостоятельно:

$$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x+6y=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 2x+5y=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-6y=26 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x+2y=18 \\ 6x+4y=26 \end{cases}$$

Проверьте правильность решения по ответам:

(2;1); (3;2); (2;-3); (1;5)

## Решение задач методом Крамера

А теперь рассмотрим примеры задач на составление систем уравнений, которые можно решить методом Крамера.

1. В общежитии 24 комнаты, двух и трехместные. В них проживают 64 студента. Сколько больших и сколько маленьких комнат в общежитии?
Решение:

*Пусть в общежитии $x$ – маленьких, $y$ – больших комнат.*

$$\begin{cases} x+y=24 \\ 2x+3y=64 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-2=1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 24 & 1 \\ 64 & 3 \end{vmatrix} = 72-64=8$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 2 & 64 \end{vmatrix} = 64-48=16$$

$$x=\frac{8}{1}=8$$

$$y=\frac{16}{1}=16$$

*Ответ*: 8 *маленьких и* 16 *больших комнат.*

2. На три сарафана и пять платьев требуется 21 метр ткани, а на пять сарафанов и два платья – 16 метров. Сколько ткани идет на один сарафан и на одно платье?

*Пусть $x$ метров – на сарафан, $y$ – на платье*

$$\begin{cases} 3x+5y=21 \\ 5x+2y=16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6-25=-19$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 21 & 5 \\ 16 & 2 \end{vmatrix} = 42-80=-38$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 21 \\ 5 & 16 \end{vmatrix} = 48-105=-57$$

$$x=\frac{-38}{-19}=2$$

$$y=\frac{-57}{-19}=3$$

*Ответ*: 2 *метра и* 3 *метра.*

3. Две дыни дороже четырех арбузов на 20 рублей, а три дыни дороже пяти арбузов на 150 рублей. Сколько дыня и сколько стоит арбуз?

$Пусть \quad x - цена \quad дыни, \quad y - арбуза.$

$$\begin{cases} 2x - 4y = 20 \\ 3x - 5y = 150 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 12 = 2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 20 & -4 \\ 150 & -5 \end{vmatrix} = -100 + 600 = 500$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 3 & 150 \end{vmatrix} = 300 - 60 = 240$$

$$x = \frac{500}{2} = 250$$

$$y = \frac{240}{2} = 120$$

$Ответ: \quad 250 руб. - дыня \quad и \quad 120 руб. - арбуз$

## Заключение

В данных методических указаниях вы познакомились с одним из простейших методов решения линейных уравнений – методом Крамера. Он хорош тем, что имеет четкий алгоритм решения, поняв который, можно легко решить любую систему линейных уравнений, даже если она имеет дробные корни. В этом случае не подходит графический метод решения, а методы подстановки или сложения вызывают трудности и часто сопровождаются арифметическими ошибками.

В решении задач и систем линейных уравнений вы можете использовать любой из перечисленных методов.

## Литература


1. Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности 2014 ОИЦ «Академия»
2. Башмаков М.И. Математика 2014 ОИЦ «Академия»
3. Березина Н.А., Максина Е.П. Математика 2010 ИД «Риор»
4. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика 2010 Издательство «Дрофа»
5. Богомолов Н.В., Сборник задач по математике 2010 Издательство «Дрофа»
6. Богомолов Н.В., Сергиенко Л.Ю. Математика Дидактические задания 2010 Издательство «Дрофа»

## Задачи для самостоятельного решения

1. В доме 24 квартиры, трех и двухкомнатных. Всего в них 86 комнат. Сколько трехкомнатных и двухкомнатных квартир в доме?

2. В лаборатории утята и кролики. Всего 40 голов и 100 лап. Сколько утят и сколько кроликов в лаборатории?

3. Миша учится на 4 и 5. За неделю он получил 11 оценок. В сумме они 1. В автопарке 9 автобусов, рассчитанных на 23 и 45 мест. Одновременно они могут перевезти 273 пассажира. Сколько больших и сколько маленьких автобусов в автопарке?

4. Пять пирожков и две шоколадки стоят 195 рублей, а три пирожка и три шоколадки – 224 рублей. Сколько стоит один пирожок и одна шоколадка.

5. В копилке 140 монет достоинством 5 и 10 рублей. Всего 990 рублей. Сколько пятачков и десятков в копилке?

6. Расстояние между городами 86 км. Из одного города выехал велосипедист, из другого вышел пешеход. До назначенного места встречи велосипедист ехал 3 часа, а пешеход шел 4 часа. Путь, пройденный пешеходом, оказался на 46 км. меньше, чем расстояние, которое преодолел велосипедист. Определить скорости туристов.